MASTER NEGATIVE
NO. 93-81317-14

MICROFILMED 1993

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES/NEW YORK

as part of the
"Foundations of Western Civilization Preservation Project"

Funded by the
NATIONAL ENDOWMENT FOR THE HUMANITIES

Reproductions may not be made without permission from
Columbia University Library

COPYRIGHT STATEMENT

The copyright law of the United States - Title 17, United States Code - concerns the making of photocopies or other reproductions of copyrighted material.

Under certain conditions specified in the law, libraries and archives are authorized to furnish a photocopy or other reproduction. One of these specified conditions is that the photocopy or other reproduction is not to be "used for any purpose other than private study, scholarship, or research." If a user makes a request for, or later uses, a photocopy or reproduction for purposes in excess of "fair use," that user may be liable for copyright infringement.

This institution reserves the right to refuse to accept a copy order if, in its judgement, fulfillment of the order would involve violation of the copyright law.

AUTHOR:

PRANTL, [CARL] VON

TITLE:

UBER DIE MATHEMATISIRENDE ...

PLACE:

[MUNCHEN]

DATE:

1886

Master Negative #

93-81317-14

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
PRESERVATION DEPARTMENT

BIBLIOGRAPHIC MICROFORM TARGET

Original Material as Filmed - Existing Bibliographic Record

160
P882

Prantl, [Carl] von, 1820-1888.
Über die mathematisirende logik. [München] 1886.
497-515 p. 22 cm.

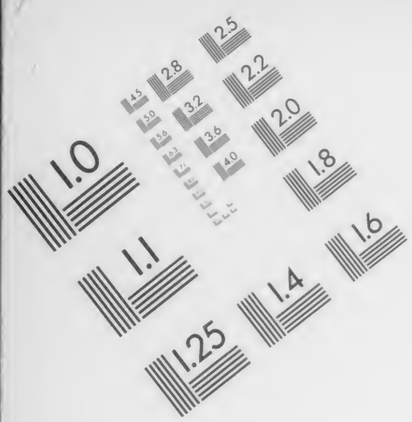
From - K. Akademie der wissenschaften, Munich. Philosophisch-philologische und historische classe. Sitzungsberichte, 1886.

349320 12-10-46 F

Restrictions on Use:

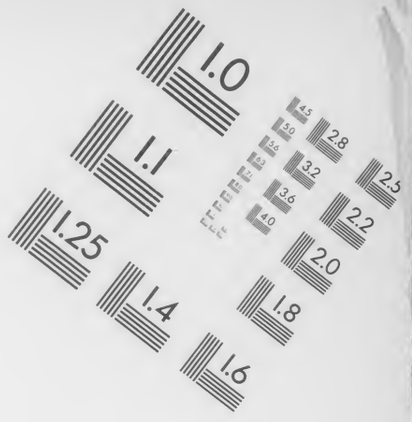
TECHNICAL MICROFORM DATA

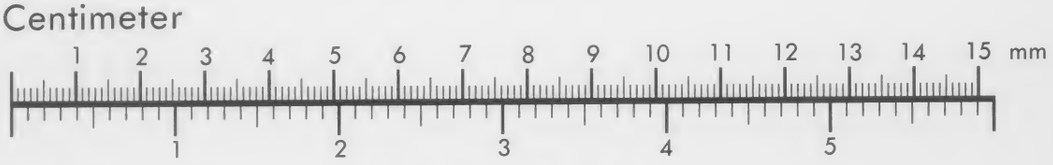
FILM SIZE: 35mm REDUCTION RATIO: 11x
IMAGE PLACEMENT: IA IIA IB IIB
DATE FILMED: 4/22/93 INITIALS EF
FILMED BY: RESEARCH PUBLICATIONS, INC WOODBRIDGE, CT

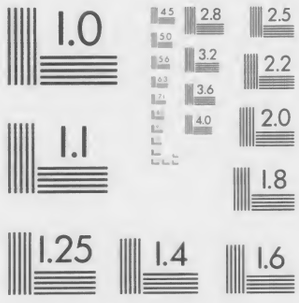


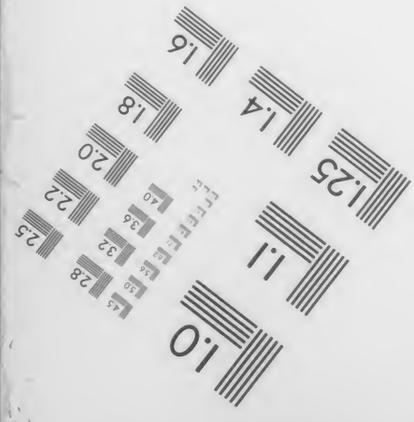
AIIM

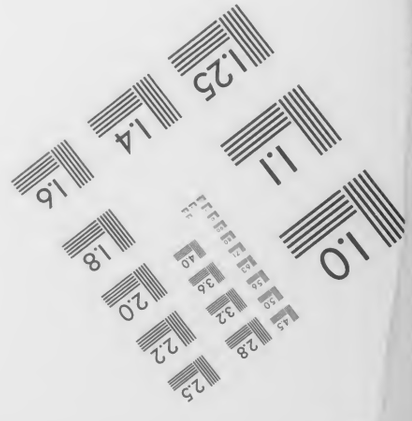
Association for Information and Image Management
1100 Wayne Avenue, Suite 1100
Silver Spring, Maryland 20910
301/587-8202











MANUFACTURED TO AIIM STANDARDS
BY APPLIED IMAGE, INC.

160
P882

Prantl
Über die mathema-
tisirende logik

160 P882

Columbia University
in the City of New York

Library

Special Fund

Given anonymously

Philosophisch-philologische Classe.

Sitzung vom 4. December 1886.

Der Classensecretär Herr v. Prantl hielt einen Vortrag:

„Ueber die mathematisirende Logik."

Es möge sich hier nicht etwa um „mathematische Logik" in dem Sinne einer besondern Logik der Mathematik handeln, wie ja z. B. auch von „naturwissenschaftlicher Logik" (inductives Verfahren) gesprochen wird oder z. B. es früher zahlreiche Schriften über „juristische Logik" gab, noch aber auch kann eine „logische Mathematik" gemeint sein, wodurch der Eindruck entstehen könnte, dass auch eine unlogische Mathematik möglich sei, — sondern es möge unter „mathematisirender Logik" eine Darstellung und Entwicklung der Denkgesetze gemeint sein, welche grundsätzlich auf Anschauungen der Mathematik beruht und auf Beseitigung der sonst üblichen Doctrin abzielt, ähnlich wie nach dem Ausspruche des Aristoteles die Pythagoreer die Mathematik zur Philosophie machten.

Es sind zwei Richtungen zu unterscheiden, deren eine eigentlich der sogenannten angewandten Logik angehört, insofern sie im Allgemeinen die Methode wissenschaftlicher Darstellung betrifft, während die andere eine Umgestaltung der sogenannten reinen Logik selbst beabsichtigt.

Was die erstere betrifft, können wir uns kurz fassen. Im Zusammenhange mit der Renaissance war eine philo-

logische Exegese des aristotelischen Organons eingetreten, welche weitere Gesichtspuncte verfolgte, als die mittelalterliche Scholastik, und zu den wieder erwachenden Autoren des Alterthums gehörte natürlich auch Euklides (allerdings in lateinischer Uebersetzung weit früher durch den Druck verbreitet, als im griechischen Original), sowie auch die medicinischen alten Autoritäten Hippokrates und Galenus eine fruchtreichere Behandlung fanden, wobei das erfreuliche Verhältniss sich zeigte, dass an der philosophischen Literatur sich vielfach Mediciner betheiligten. — An die zweite Analytik des Aristoteles knüpften sich allmälig Erörterungen über die wissenschaftliche „Methode", und gerade um die Mitte des 16. Jahrhunderts begegnen wir einer Mehrzahl von Schriften über die Logik, worin eigene Capitel „De methodo" eingereiht waren. Unter diesen Logikern war der Baseler Hospinianus der erste, welcher in seinen Quaestiones dialecticae (1543) für die methodus apodictica auf Euklides als „optimus demonstrandi artifex" hinwies, und bald darauf benützte der Giessener Professor Michael Neander in seiner „Methodorum ὑφήγησις" (1556) grundsätzlich eine Stelle des Galenus, welche auf den grossen Vorzug der γεωμετρικαὶ ἀποδείξεις hinweist (s. meine Gesch. d. Log., Abschn. IX, Anm. 81); in dem ausgedehnten bitteren Streite, welchen Petrus Ramus durch Betonung des allein beglückenden rhetorischen Verfahrens hervorrief, suchte der Hauptgegner desselben Carpentarius (1564) die Verschiedenheit der Methoden darzulegen. War so die Frage einmal in Fluss gekommen, so übte der im Gebiete der Mathematik hervorragende Descartes einen entscheidenden Einfluss aus, indem er in dem Discours de la méthode (1637) auf das Vorbild der Mathematik blickte, deren synthetisches Verfahren dem didaktischen Zweck besser diene, als das analytische, welches mehr die Erfindung fördere. So stellte er auch selbst axiomatische Grundsätze an die Spitze, während er in seinen Meditationes

II-2659

FW 4-2-11

de prima philosophia (1641) doch wieder nach eigenem Geständnisse die analytische Gedankenentwicklung bevorzugte, da in der Metaphysik es seine Schwierigkeit habe, in sicheren und unzweifelhaften Definitionen einen Ausgangspunct weiterer Beweisführung zu finden. Die Principia philosophiae aber (1644) bewegen sich bereits in synthetischer Entwicklung, und hierin war für Spinoza der Anknüpfungspunct gegeben, um (1663) „Renati Des Cartes principia philosophiae more geometrico demonstrata .... accesserunt Bened. Spinozae cogitata metaphysica" zu verfassen; dass Spinoza's Hauptwerk Ethica ordine geometrico demonstrata (1677) in nahezu extremer Weise die Euklidische Methode der Darlegung durchführt, ist allgemein bekannt. Indem hierauf Leibniz die Entwicklung der menschlichen Erkenntniss auf den Dualismus von vérités de raisonnement und vérités de faits begründete, war ihm das Charakteristicum der ersteren die logische Widerspruchlosigkeit nach dem sogenannten principium identitatis et contradictionis, sowie der letzteren die Abfolge des Causalzusammenhanges. So wurde die Andemonstrirbarkeit das Kriterium der Wahrheit für die rationalistische Behandlung der Gegenstände der Philosophie im Unterschied gegen die parallel nebenher gehende empiristische Darstellung, und zum Zwecke des Andemonstrirens erschien auch dem Tschirnhaus der ordo geometricus als der einzig richtige. Sodann aber führte der Leibnizianer Christian Wolff die mathematische Methode mit peinlicher Einseitigkeit in allen Hauptzweigen der Philosophie, und somit besonders auch in der sogenannten Metaphysik durch. Doch es fand dieses Verfahren des Rationalismus sein rasches Ende durch jene denkwürdige Preisaufgabe der Berliner Akademie vom Jahre 1763, bei deren Bearbeitung Mendelssohn und Kant concurrirten. Dieselbe lautete „Sind die metaphysischen Wahrheiten derselben Evidenz fähig wie die mathematischen"? Mendelssohn, welcher hauptsächlich die psychologische Wirkung der Deutlichkeit

und Fasslichkeit erörterte, erhielt von der Akademie den Preis; Kant, welchem das Accessit ertheilt wurde, wies darauf hin, dass die metaphysische Methode sich nur in analytischer Zergliederung der Erfahrung bewegen könne und daher hier die allgemeinsten Begriffe erst Schluss-Ergebnisse seien, während die Mathematik gerade das Allgemeinste als Voraussetzung postulire, sowie, dass Mathematik das Allgemeine in concreto, Metaphysik aber dasselbe in abstracto besitze. — Jedenfalls hat seitdem kein Philosoph es mehr unternommen, die Philosophie more geometrico zu entwickeln. Wohl finden wir noch vereinzelte Spielereien mit mathematischer Symbolik[1]), aber Solches hat mit unserer logischen Frage Nichts zu thun.

Anders verhält es sich mit der zweiten Richtung, d. h. mit der Mathematisirung der eigentlichen Logik selbst. Den ersten Anstoss dazu gab Leibniz, welcher schon in seiner Jugendschrift Ars combinatoria (1666) sich um ein Alphabet ursprünglicher Begriffe, mit welchen „gerechnet" werden soll, bemühte und diesen Grundgedanken auch später nach verschiedenen Seiten wieder aufnahm (von jener Erstlingsschrift selbst sagte er allerdings i. J. 1700 in d. Act. Erud. Lips. (S. 208) „nolim aestimari"). In den „Meditationes de cognitione veritatis" (1684) und in einigen kleineren Aufsätzen (Calculus ratiocinator, Mathesis rationis, Difficultates Logicae), welche ohngefähr in dieselbe Zeit fallen, denkt er nicht nur

1) Z. B. bei Joh. Jak. Wagner, Mathematische Philosophie (1811) lesen wir unter Anderem: „Der Triangular-Begriff Schicksal hat zu seinen Katheten die Action des Individuums und die Reaction der Welt; je nachdem der umlaufende Halbmesser, d. h. die Zeit, steht, ändert sich der Sinus, denn es gibt Zeitalter, in welcher die Individualität ihr Schicksal macht, wie beim Faustrecht, und andere, wo sie von den Umständen getragen oder zertreten wird, wie in der Culturzeit" oder: „Die Parabel ist die dramatische Linie, d. h. der Wurf der kühnen Individualität neben der Rotation der allgemeinen geistigen Schwere" u. dgl. mehr.

an eine Rechnung, welche auf Grundlage identischer Urtheile, d. h. Definitionen, vollzogen werden soll, sondern er spricht auch von einer Zurückführung der kategorischen Urtheile auf Gleichheit und Verschiedenheit, so dass sich ihm der Ausdruck „Gleichungen" (aequipollentiae) einstellt, ja wir finden bei ihm bereits den Grundsatz, dass bei jedem bejahenden Urtheile das Prädicat eigentlich particular sei. Das Motiv des Rechnens liegt auch seinen Bestrebungen nach einer allgemeinen Zeichensprache (characteristica universalis) zu Grunde, bei deren Durchführung jeder Streit durch Rechnung entschieden werden und jeder Irrthum sich als Rechnungsfehler erweisen müsse.

Hierauf nun beruht jene Theorie des Tübinger Leibnizianers Ploucquet (geb. 1716, † 1790), welche damals allgemein als „logischer Calcul" bezeichnet wurde und durch denselben ihre Darstellung fand in „Fundamenta philos. speculativae" (1759), dann „Methodus tam demonstrandi directe omnes syllogismorum species quam vitia formae detegendi" (1763) und „Methodus calculandi in logicis" (1763). Sieht man von der Erschwerung ab, welche Ploucquet dem Leser durch Buchstaben und Zeichen bereitet, welche von den in der Logik üblichen gänzlich abweichen, so findet man folgende auf Leibniz zurückweisende Grundsätze einer mathematisirenden Logik. Bejahung und Verneinung seien lediglich Ausdrücke für identitas und diversitas, d. h. das bejahende Urtheil sei expressio unius rei per diversa signa, womit natürlich der Begriff einer arithmetischen Gleichung gegeben ist. Die Prädicate der allgemeinen Urtheile seien, um die Gleichung zu erfassen, stets particular zu nehmen; das Urtheil „Die Rose ist roth" heisse eigentlich „Die Rose ist rosenroth", oder „Alle Kreise sind Figuren", d. h. eben Kreisfiguren, und „Alle Quadrate sind Figuren", d. h. eben Quadratfiguren, so dass in diesen beiden Urtheilen das gleiche Prädicat eine verschiedene Particularität habe, in dieser aber

mit dem Subjecte identisch sei. Sobald man zu jedem Prädicate das richtige Quantitätszeichen setze, zeige sich, dass die üblichen Regeln der Umkehrung der Urtheile in Wegfall kommen, da dann alle Urtheile umkehrbar seien. Von einer Subordination eines Begriffes unter einen anderen könne keine Rede sein, denn es handle sich nur um den richtigen Ausdruck einer Gleichung. Für den Syllogismus gelte die einzige einfache Regel, dass im Schlusssatze die Termini in der nämlichen Quantität genommen werden, in welcher sie in den Prämissen stehen, und sonach bedürfe es keiner Aufzählung und Begründung einzelner Schlussfiguren und Modi, denn durch jene Regel seien unzulässige Modi von vorneherein abgewiesen. Dafür freilich kommt Ploucquet bei der Verdeutlichung seines Verfahrens dazu, in der ersten Figur einen Modus zuzulassen, welcher Barbero heissen müsste, und ebenso in der zweiten Figur einen Modus Falepten. Baut er so in den Grundsätzen der Logik auf Leibniz fort, so lehnt er doch die allgemeine Charakteristik desselben ab, weil die genera rerum verschieden seien und sich nur für jede Gattung eine specielle Zeichensprache herstellen lasse. Ploucquet sah sich dann auch veranlasst, seine Buchstaben-Zeichen und seine algebraische Manipulation gegen Lambert (geb. 1728, † 1777) zu vertheidigen, welcher in seinem Novum Organon (1764) eine geometrische Versinnlichung der Quantitätsverhältnisse und auch der Particularität der Prädicate vorschlug, indem er längere und kürzere Linien übereinander schrieb, wobei wenigstens die Subordination bewahrt blieb und ihren zeichnerischen Ausdruck finden konnte. Es fehlte auch nicht an begeisterten Anhängern des logischen Calculs, zu welchen z. B. H. Wilh. Clemm, Novae amoenitates literariae, Fasc. 4 (1764) und Aug. Friedr. Böck, Sammlung der Schriften, welche den logischen Calcul Herrn Prof. Ploucquets betreffen (1766), gehören.

Im Jahre 1800 erschien des Württembergers Bardili

(geb. 1761, † 1808) „Grundriss der ersten Logik“ [1]), woselbst bezüglich der principiellen Forderung, dass die Logik zugleich Ontologie sein müsse, die Analogie zu Grunde gelegt wird, dass in der Mathematik beim Rechnen das Denken selbst beschrieben werde, beim Berechnen aber dasselbe in einem Gegenstande ausserhalb beschrieben werde und die Rechnung hiebei die gleiche bleibe. Somit wirft sich Bardili grundsätzlich auf die Function des Rechnens; diese nemlich beruhe auf der unendlichen Möglichkeit, Eins zu wiederholen, und so heisse einen Gegenstand verstehen Nichts anderes, als das Denken in seiner unendlichen Wiederholbarkeit in dem Gegenstande setzen, d. h. ihn durch das Denken dividiren, wodurch die Materiatur des Gegenstandes aufgehoben werde, jedoch so, dass immer noch ein unaufhebbarer Rest bleibe, welcher immer wieder dividirt werden müsse. So gelangt er dazu, durch Divisionsformeln, d. h. speciell durch Kettenbrüche, die Hauptstufen der Wirklichkeit auszudrücken. Und so sonderbar diese Grille ist (— es lässt sich wohl kaum anders bezeichnen —), so trat doch K. Leonh. Reinhold förmlich schwärmerisch dafür ein.

Ernster aber ist die Art und Weise zu nehmen, in welcher die mathematisirende Logik in England ausgebildet wurde und bis zum heutigen Tage vielfachste Zustimmung findet. Eine tiefere Grundlage hiefür bietet sich uns in den weit verbreiteten Ansichten über das inductive Verfahren, welche am eindringlichsten durch Stuart Mill und Herbert

1) Der langathmige, aber sehr bezeichnende Titel der Schrift lautet vollständig: „Grundriss der ersten Logik, gereinigt von den Irrthümern bisheriger Logiken überhaupt, der kantischen insbesondere; keine Kritik, sondern eine medicina mentis, brauchbar hauptsächlich für Deutschlands kritische Philosophen. Der Berliner Akademie, den Herren Herder, Schlosser, Eberhard, jedem Retter des kranken Schulverstandes, mithin vorzüglich auch dem Herrn Friedrich Nicolai widmet dieses Denkmal die deutsche Vaterlandsliede. 1800.“

Spencer vertreten wurden, zwei Autoren, welche auch bei uns durch mehrfache Uebersetzungen Eingang fanden. Bis zum Ueberdruss wurde der für uns ziemlich bedenkliche Grundsatz wiederholt, dass der Syllogismus „Alle Menschen sind sterblich, Cajus ist ein Mensch u. s. f." eigentlich doch nur ein Inductions-Beweis sei, welcher aus dem Tode der einzelnen Menschen gewonnen werde, und wenn immer wieder gesagt wird, dass alle Schlüsse nur von Einzelnem auf Einzelnes gehen, so bleibt das logische Bewusstsein, insoferne es auf Allgemein-Begriffe gerichtet ist, völlig ausser Ansatz, und den alleinigen Ersatz hiefür bildet freilich das Zählen und das Zusammenzählen, so dass wir nicht überrascht sein können, wenn wir belehrt werden, dass die ganze Syllogistik als Induction sich nur in algebraischen Proportionen bewege. Diess ist der gemeinschaftliche Boden, aus dessen weiterer Bebauung in England und folglich auch in Nordamerika ein reicher Zweig der logischen Literatur erwuchs, während allerdings auch dort eine Anzahl anderer Autoren sich in der üblichen aristotelischen Tradition bewegte. Zu den hauptsächlichen Vertretern der mathematisirenden Logik gehören zunächst der Botaniker George Bentham, ein Neffe des bekannteren Jeremias Bentham (Outline of a new system of logic, 1827) und William Hamilton († 1856; Logic, 1846), welch beide betreffs der Lehre vom Urtheile die seitdem so oft genannte Quantificirung des Prädicates vertraten, d. h. den Grundsatz, dass das Prädicat stets die gleiche Quantität mit dem Subjecte habe. Auf dieser Lehre von den Identitäts-Urtheilen baute August De Morgan († 1871; First notions of logic, 1839, Formal Logic, 1847) fort, indem ihm sowohl das allgemeine als auch das particulare Urtheil nur als Summen vorhergehender singulärer Urtheile gelten, so dass auch bei der Induction nur das zwischen den Theilen und dem Ganzen bestehende Quantitäts-Verhältniss obwalte; und da auf diese Weise jedes Wort im Satze zugleich positiv

eine bestimmte Anzahl von Summanden darstelle und zugleich negativ eine andere Anzahl von Summanden ausschliesse, sei der Unterschied zwischen bejahenden und verneinenden Urtheilen aufgehoben. Weiter gesteigert erscheint diese Auffassungsweise bei George Boole († 1864; The mathematical analysis of logic, 1847, Investigation of the laws of thought, 1854), welcher für seinen Calcul der Syllogistik abermals neue Zeichen wählte, an welche allerdings der Leser sich erst gewöhnen muss, und die quantitative Bedeutung der Begriffe dahin ausdehnte, dass die constituirenden wesentlichen Merkmale eines Begriffes ebenso wie die Summanden einer Summe beliebig vertauscht werden können. In diesem Sinne spricht er von commutativen und distributiven Urtheilen, welche Gegenstand von Rechnungen sind, die sich bis in die Lehre von den Functionen erstrecken, und ebenso ist ihm im Syllogismus die Elimination des Mittelbegriffes ein lediglich algebraisches Verfahren. Merkwürdig eigenthümlich ist seine Auffassung des hypothetischen Urtheiles, wornach der Satz „Wenn A ist, ist B" nur zu erklären sei durch „Die Zeit, in welcher A richtig ist, ist die Zeit, in welcher auch B richtig ist." Einen Höhepunct erreichte der logische Calcul der Engländer bei Stanley Jevons († 1882; Pure Logic, 1864, Elementary lessons on logic 1870, The principles of science 1874, Logic 1876), insoferne derselbe nicht nur die bisher erwähnten Grundsätze weiter auszuführen unternahm, sondern auch bezüglich der Syllogistik, welche er auf eine Substitution des quantitativ Gleichwerthigen zurückführte, schliesslich zur Erfindung einer „logischen Maschine" gelangte. Dieselbe hat nach Art eines Clavieres eine Tastatur von 21 Tasten, welche mit den Zeichen für 4 positive und entsprechende 4 negative Begriffe in gerader und rückläufiger Richtung, sowie mit den Zeichen für alternative Distribution versehen sind, und indem nun auf die Tasten gedrückt wird, auf welchen die in zwei Urtheilen

enthaltenen Begriffe bezeichnet sind, bewirkt der Mechanismus eine Bewegung in einer oberhalb befindlichen Platte, welche aus 16 Streifen besteht, deren jeder eine viergliederige Combination jener obigen 8 Begriffe enthält, und zwar besteht das Resultat dieser Bewegung darin, dass die mit den zwei Urtheilen nicht vereinbaren Combinationen durch Umkippen verschwinden. So sind wir bei einer Rechenmaschine angekommen, deren wirklich logischer Werth wohl ebenso zweifelhaft sein dürfte wie jener der Ars magna des Raimundus Lullus.

Bei den vorstehenden kurzen geschichtlichen Notizen ist, wie sich von selbst versteht, nicht etwa eine Vollständigkeit betreffs der Autoren, geschweige denn bezüglich der Doctrinen, beansprucht[1]), sondern es sollte nur im Allgemeinen der Standpunct gekennzeichnet werden, welchen die mathematisirende Logik einnimmt. Insoweit aber die betreffende englische Literatur auch bei uns in Deutschland Einfluss gewinnen zu sollen scheint, mag vielleicht auch eine beurtheilende Meinungs-Aeusserung gestattet sein, wobei es sich sicher um eine grundsätzliche Vergleichung zwischen Mathematik und Logik handeln muss, welche Vergleichung jedoch wahrlich weder zu Ungunsten noch zu Gunsten der Einen der beiden Disciplinen ausschlagen, sondern nur auf ein „Suum cuique" abzielen soll.

Vor Allem wird Jedermann zugeben, dass die Mathematik logischen Gesetzen folgt und unterliegt, so dass der kurze Satz „Alle Mathematik ist logisch" als berechtigt gelten muss; aber schon nach den gewöhnlichsten Regeln der Logik darf darum nicht umgekehrt gesagt werden, dass

1) Näheres bei A. Riehl „Die englische Logik der Gegenwart" in der Vierteljahrsschrift f. wissenschaftl. Philosophie Jahrg. I (1876) Heft 1, sowie bei L. Liard, Die neuere englische Logik, übers. von J. Imelmann, 2. Aufl. 1883. Vgl. auch Delboeuf, L'algorithmie et la, logique in Ribot's Revue philos. 1. Jahrg., Heft 10.

alles Logische mathematisch sei, und auch nach den Grundsätzen des logischen Calculs hat jenes allgemein bejahende Urtheil eigentlich den Sinn „Alle Mathematik ist mathematisch logisch", d. h. mit anderen Worten, dass die Mathematik wohl der Logik bedarf, aber diese mathematische Logik innerhalb des Gesammt-Umkreises der Logik nur bei der rein mathematischen Betrachtung berechtigt ist. Auf dieser Grundlage lässt sich vielleicht eine weitere Darlegung des Suum cuique versuchen.

Während die mathematisirende Logik ausgesprochenermassen auf Beseitigung des aristotelischen Organons abzielt, ist sie sichtlich sich dessen nicht bewusst, dass sie eigentlich auf einer folgerichtigen Fortführung einer schwachen Seite der Logik des Aristoteles beruht. Dort nemlich sowie in der gesammten an Aristoteles sich anlehnenden formalen Logik zeigt sich deutlich sowohl bei der Lehre vom Urtheile als auch in der Syllogistik eine einseitige Betonung des Umfanges der Begriffe gegenüber dem Inhalte derselben. Ein unverkennbarer Ausdruck dieser Einseitigkeit ist die längst übliche Verwendung der sogenannten Euler'schen Kreise, welche übrigens nicht Euler, sondern der Zittauer Rector Christ. Weise († 1708) erfunden hat, daher sie zum ersten Male in seines Schülers, des Giessener Professors Joh. Christ. Lange († 1756), „Nucleus logicae Weisianae", 1712, erscheinen. Bei diesen Kreisen waltet durchgängig eine quantitative Abgränzung des Umfanges, wobei der qualitative Inhalt des Begriffes nur insoferne in Betracht kömmt, als durch Hinzufügung eines Merkmales der Umfang verengert wird. Hiemit aber ist die beliebte „Quantificirung des Prädicates" bereits gegeben, denn wenn z. B. alle Vögel Wirbelthiere sind, so wird innerhalb des Umkreises der letzteren jenes Quantum derselben, welches den Kreis der Vögel bildet, durch einen kleineren Kreis versinnlicht. Solch quantitative Betrachtungsweise aber fällt wesentlich der Mathematik an-

heim, sowie die zur Versinnlichung gewählten Kreise dem Gebiete der Geometrie entlehnt sind und folglich auf mathematische Anschauung zurückweisen, worin sich auch Nichts ändert, wenn statt der Kreise, bei welchen innerhalb des grösseren Kreises unausgefüllte Lücken bleiben, von Plouequet Dreiecke oder von Maass Vierecke vorgeschlagen wurden.

Alle Mathematik beruht ursprünglich auf der dem Menschen allein zukommenden Fähigkeit des Zählens, wobei der dem Menschen ausschliesslich eigenthümliche Zeit-Sinn die reine Succession des Nacheinander markirt und hiedurch auch das reine Nebeneinander des expansiven Seins erfasst. Indem hiebei von der concret einzelnen Erfüllung der Zeit-Theilchen durch Vorgänge und der gleichen Erfüllung der Raum-Theilchen durch Stoffe abgesehen wird, bleibt jede qualitative Bestimmtheit des Seienden ausgeschlossen, und hierin liegt der schon von Aristoteles bemerkte Charakter der Mathematik, dass sie, wie derselbe sich ausdrückt, *δι' ἀφαιρέσεως* denkt, d. h., wie wir jetzt sagen, eine abstracte Wissenschaft ist. Indem die Mathematik, sobald sie zu dem noch gleichmässig für Arithmetik und Geometrie geltenden Begriffe „Quantum" gelangt ist, sofort dazu fortschreitet, „Verhältnisse der Quanta" zu betrachten, wird man allerdings nicht unrichtig sagen, dass diese Verhältnisse in der Vorstellung ein Qualitatives sind, wie z. B. Gleichheit und Ungleichheit, endlich und unendlich, constant und variabel u. s. f., aber zugleich wird zugegeben werden müssen, dass diess eben Qualitäten des Quantitativen sind und hiemit letzteres für die Mathematik die Grundlage bleibt. Das Gleiche gilt auch, wenn, wie bekannt, die Mathematik es unternimmt, die qualitative Bestimmtheit des Seienden dem quantitativen Calcul zu unterwerfen, indem sie Zahlen-Scalen manigfacher Art ersinnt oder in der Stöchiometrie die constituirenden Elemente in proportionalen Zahlen-Werthen feststellt. Und während solch mathematische Fassung grundsätzlich überwiegendst im Gebiete der materiellen Natur waltet, wird selbst dieses noch überschritten, indem, wenn auch in unvollkommenerer Weise, irgend Scalen und Proportionen auch auf geistige Qualitäten angewandt werden. Nicht bloss, dass wir z. B. bei wissenschaftlichen Prüfungen von einer ersten, zweiten und dritten Note sprechen, wobei freilich die Abgränzung ihre thatsächlichen Schwierigkeiten hat, sondern wir müssen hiebei vor Allem an die ausgedehnte und schwierige Disciplin denken, welche Statistik heisst und bei ihrem Bestreben, „Gesetze" der Geschichte oder besonders der Culturgeschichte festzustellen gleichfalls bezüglich des Qualitativen auf Schwierigkeiten stösst. Es ist leicht gesagt „Zahlen sprechen", wir aber bitten nur hinzuzufügen „soviel sie können", denn jedermann wird zugestehen, dass z. B. bei der Krankheits-Statistik oder bei der Verbrecher-Statistik die dem thatsächlichen Auftreten vorangehenden physischen und psychischen Qualitäten der Menschen, sowie Einflüsse der Erziehung oder Umgebung sich entweder völlig einer Zählung entziehen oder nur mangelhaft durch schwankende Schablonen in quantitative Rubriken gebracht werden können. Einrichtungen aber, welche sich grundsätzlich auf Berechnung aufbauen, wie z. B. Versicherungs-Gesellschaften jeder Art, müssen eben darum auf das durch Statistik erreichbare quantitative Mass einer Wahrscheinlichkeit beschränkt bleiben. In ähnlicher Weise könnte auch daran erinnert werden, dass da, wo Zweifel und Streit ausgeschlossen bleiben sollen, auch andere Gebiete zu einer in Zahlen ausgedrückten quantitativen Gränzbestimmung greifen, wie z. B. der Rechtstrieb um der unerlässlichen Form-Festigkeit willen den Unterschied zwischen Minorenn und Majorenn an eine bestimmte Jahres-Ziffer knüpft oder bei der Verschollenheits-Erklärung eine eigentlich willkürlich gewählte Zahl der Lebensdauer zu Grunde legt oder beim Straf-Rechte ein Zahlen-Maximum und -Minimum für die Straf-Ausmessung feststellt.

Sowie die Mathematik überhaupt bei nicht-mathematischen Gegenständen den einzelnen concreten Sachverhalt und dessen begriffliche Fassung bei Seite lässt[1]), so verfährt sie in gleicher Weise auch bei der mathematischen Behandlung der Variabilität selbst, d. h. bei der Lehre von den Functionen, sowie bei der Wahrscheinlichkeits-Rechnung bis hinein in die Methode der kleinsten Quadrate, d. h. sie verbleibt in der quantitativen Auffassung. Eben hierin aber schreitet sie über das empirisch Gegebene unendlich weit hinaus und unabhängig von der Wiederholung äusserer Erfahrung entwickelt sie aus sich selbst eine Bewahrheitung ihrer Voraussetzungen durch die Uebereinstimmung sämmtlicher aus denselben zu ziehenden Folgerungen. Die Lehrsätze der Mathematik enthalten ausnahmslose unbestreitbare und unfehlbare Wahrheiten, bei welchen Zweifel und Irrthum ausgeschlossen ist. Aber über die Entstehung und Begründung der Lehrsätze und somit auch über System-Fragen kann gezweifelt und gestritten werden, während die Lehrsätze selbst unwandelbar und auch völlig international geltend bestehen bleiben. Man kann z. B. über die Berechtigung der imaginären Grösse ($\sqrt{-1}$) streiten, oder man kann fragen, ob nicht der pythagoreische Lehrsatz am besten in einer Weise begründet werde, welche mutatis mutandis auch von den nicht-rechtwinklichen Dreiecken gelte ($a^2 + b^2 \pm 2ab$, welch letzteres bei Rechtwinklichkeit $= 0$ wird), oder man hat z. B. an Stelle der in den einzelnen Lehrsätzen ewig richtigen Geometrie des Euklides eine neuere „nicht-euklidische“

1) Es wird z. B. bei den Gleichungen als Schulaufgabe die Frage gestellt, wann und wie oft die Zeiger einer Uhr aufeinander zu stehen kommen, und ein begabterer Schüler wird hiebei nach einigem Nachsinnen an die sogenannten Boten-Rechnungen denken, d. h. er wird davon absehen, ob das Fortschreitende zwei Uhr-Zeiger oder zwei Menschen seien, deren Einer dem Anderen nacheilt, d. h. der Schüler wird „abstract“ denken, nemlich nur an das quantitative Mass der Bewegung.

Geometrie der Lage gesetzt. Die quantitativen Masse und Verhältnisse der Raum-Quanta sowie der Zahl-Quanta bleiben auch bei verschiedener Behandlung die gleichen.

In Folge der unbestreitbaren und zweifellosen Wahrheit, welche der Mathematik einwohnt, ergab sich eine weitgreifendste Herrschaft der Gesetze und Folgerungen des Quantitativen, indem die Naturwesen und die Naturkräfte möglichst dem Calcul unterworfen wurden. So errang die Mathematik unzweifelhaft die wohlverdientesten Siege über die bloss sinnliche Auffassung des Materiellen, und es haben ebensosehr die Naturwissenschaften durch Mathematik reichste Förderung erfahren, wie das unendliche Gebiet der Technik jeder Art auf Mechanik und hiemit auf Mathematik angewiesen bleibt.

Aber durch die quantitative Auffassung ist das Wesen des Seienden nicht erschöpft, da dasselbe aller Wege qualitative Bestimmtheit an sich trägt, welche dadurch, dass sie dem Calcul unterworfen wird, nicht aufhört zu bestehen, und man dürfte doch schwerlich behaupten wollen, dass all jene unsere Erkenntniss mangelhaft sei, welche nicht durch eine Zurückführung auf Quantitatives begründet ist. Ja auch wo eine solche Zurückführung gelungen ist, verbleibt immer noch ein nicht-mathematischer, nemlich ein qualitativer Bestand, welcher Gegenstand unmittelbar Erfahrung ist. Wenn z. B. die mathematische Naturwissenschaft auf Grundlage der Aether-Hypothese gewiss mit Recht die Verschiedenheit der Farben auf Zahlen der Aether-Schwingungen hinüberführt, so wird der Grund dieser quantitativen Verschiedenheit doch schliesslich irgendwo in Qualitativem gesucht und gefunden werden müssen, so dass sich unwillkürlich immer wieder der Begriff „qualificirter Kräfte“ aufdrängt[1]). Man spricht ja

1) Dass eine ausschliesslich mathematische Auffassung der Kräfte nicht genüge, bemerkt z. B. auch A. Turner, Die Kraft und Materie im Raume. 3. Aufl. (1886), S. 86 f.

Sowie die Mathematik überhaupt bei nicht-mathematischen Gegenständen den einzelnen concreten Sachverhalt und dessen begriffliche Fassung bei Seite lässt[1]), so verfährt sie in gleicher Weise auch bei der mathematischen Behandlung der Variabilität selbst, d. h. bei der Lehre von den Functionen, sowie bei der Wahrscheinlichkeits-Rechnung bis hinein in die Methode der kleinsten Quadrate, d. h. sie verbleibt in der quantitativen Auffassung. Eben hierin aber schreitet sie über das empirisch Gegebene unendlich weit hinaus und unabhängig von der Wiederholung äusserer Erfahrung entwickelt sie aus sich selbst eine Bewahrheitung ihrer Voraussetzungen durch die Uebereinstimmung sämmtlicher aus denselben zu ziehenden Folgerungen. Die Lehrsätze der Mathematik enthalten ausnahmslose unbestreitbare und unfehlbare Wahrheiten, bei welchen Zweifel und Irrthum ausgeschlossen ist. Aber über die Entstehung und Begründung der Lehrsätze und somit auch über System-Fragen kann gezweifelt und gestritten werden, während die Lehrsätze selbst unwandelbar und auch völlig international geltend bestehen bleiben. Man kann z. B. über die Berechtigung der imaginären Grösse ($\sqrt{-1}$) streiten, oder man kann fragen, ob nicht der pythagoreische Lehrsatz am besten in einer Weise begründet werde, welche mutatis mutandis auch von den nicht-rechtwinklichen Dreiecken gelte ($a^2 + b^2 \pm 2ab$, welch letzteres bei Rechtwinklichkeit $= 0$ wird), oder man hat z. B. an Stelle der in den einzelnen Lehrsätzen ewig richtigen Geometrie des Euklides eine neuere „nicht-euklidische“

1) Es wird z. B. bei den Gleichungen als Schulaufgabe die Frage gestellt, wann und wie oft die Zeiger einer Uhr aufeinander zu stehen kommen, und ein begabterer Schüler wird hiebei nach einigem Nachsinnen an die sogenannten Boten-Rechnungen denken, d. h. er wird davon absehen, ob das Fortschreitende zwei Uhr-Zeiger oder zwei Menschen seien, deren Einer dem Anderen nacheilt, d. h. der Schüler wird „abstract“ denken, nemlich nur an das quantitative Mass der Bewegung.

Geometrie der Lage gesetzt. Die quantitativen Masse und Verhältnisse der Raum-Quanta sowie der Zahl-Quanta bleiben auch bei verschiedener Behandlung die gleichen.

In Folge der unbestreitbaren und zweifellosen Wahrheit, welche der Mathematik einwohnt, ergab sich eine weitgreifendste Herrschaft der Gesetze und Folgerungen des Quantitativen, indem die Naturwesen und die Naturkräfte möglichst dem Calcul unterworfen wurden. So errang die Mathematik unzweifelhaft die wohlverdientesten Siege über die bloss sinnliche Auffassung des Materiellen, und es haben ebensosehr die Naturwissenschaften durch Mathematik reichste Förderung erfahren, wie das unendliche Gebiet der Technik jeder Art auf Mechanik und hiemit auf Mathematik angewiesen bleibt.

Aber durch die quantitative Auffassung ist das Wesen des Seienden nicht erschöpft, da dasselbe aller Wege qualitative Bestimmtheit an sich trägt, welche dadurch, dass sie dem Calcul unterworfen wird, nicht aufhört zu bestehen, und man dürfte doch schwerlich behaupten wollen, dass all jene unsere Erkenntniss mangelhaft sei, welche nicht durch eine Zurückführung auf Quantitatives begründet ist. Ja auch wo eine solche Zurückführung gelungen ist, verbleibt immer noch ein nicht-mathematischer, nemlich ein qualitativer Bestand, welcher Gegenstand unmittelbar Erfahrung ist. Wenn z. B. die mathematische Naturwissenschaft auf Grundlage der Aether-Hypothese gewiss mit Recht die Verschiedenheit der Farben auf Zahlen der Aether-Schwingungen hinüberführt, so wird der Grund dieser quantitativen Verschiedenheit doch schliesslich irgendwo in Qualitativem gesucht und gefunden werden müssen, so dass sich unwillkürlich immer wieder der Begriff „qualificirter Kräfte“ aufdrängt[1]). Man spricht ja

1) Dass eine ausschliesslich mathematische Auffassung der Kräfte nicht genüge, bemerkt z. B. auch A. Turner, Die Kraft und Materie im Raume. 3. Aufl. (1886), S. 86 f.

doch in wissenschaftlichem Sprachgebrauche von einem physischen Pendel so gut wie von einem mathematischen Pendel.

Das qualitative Wesen der Dinge und die qualitativen Bestimmtheiten der Denkobjecte sind gewiss ein mit dem Quantitativen gleichberechtigter Gegenstand der Denk-Operationen und folglich der die Gesetze derselben entwickelnden Logik. Die Logik hat sich überhaupt mit den Denkwerthen des ausgesprochenen Denkens (— ein anderes gibt es ja nicht —) zu beschäftigen, und wenn die Mathematik ihrerseits eine ihr eigenthümliche Sprache spricht, welche bezüglich der Verhältnisse des Quantitativen in abkürzenden Zeichen ausgedrückt wird, so hat die Ausbeutung des Denkwerthes dieser Sprache den Gesetzen des Denkens überhaupt zu folgen, und so ist auch die Mathematik logisch. Die gedankenhaltige Sprache aber umfasst weit Mehreres, als die Verhältnisse des Qantitativen, welche mit dem Zählen und zählenden Messen beginnen. In der Sprache wirkt der Zeit-Sinn oder Continuitäts-Sinn dahin, dass innerhalb der durch Eindrücke veranlassten Verlautbarung der Faden einer Bedeutung fortgesponnen wird, daher nicht nur sämmtliche Worte, sondern auch die grammatischen und syntaktischen Formen der Sprache einen Denkwerth haben, welcher für die Logik von Belang ist, ohne dass dieselbe darum etwa zur Lexikographie oder zur Grammatik werde (allerdings beachtet es die gewöhnliche formale Logik nicht, dass auch ein „Obgleich" oder ein „Damit" u. dgl. einen logischen Werth habe). Der Verschiedenheit der Wortformen, d. h. der Verba, Substantiva, Adjectiva u. s. f. liegt zu Grunde, dass durch das Denken in dem objectiv Seienden und Geschehenden 1) Gegenstände, 2) Zustände und Vorgänge, welch beide sowohl qualitativ als auch quantitativ als auch örtlich und zeitlich sein können, und 3) Beziehungen erfasst werden.

So umfängt die gedankenhaltige Sprache ein wahrhaft unendliches Gebiet, innerhalb dessen auch das Quantitative

seine ihm eigenthümliche Stelle und Entwicklung findet, sowie desgleichen das substantielle Wesen und die qualitative Bestimmtheit des Bestehenden und der Vorgänge dem logigischen Denken den reichsten objectiven Stoff darbieten. Darum ist in der mathematisirenden Logik die Quantificirung des Prädikates das *πρῶτον ψεῦδος* und die Quelle der ganzen daraus folgenden Einseitigkeit. Niemand zweifelt daran, dass die Rose rosenroth ist, oder dass die Ellipse unter den verschiedenen Kegelschnitten derjenige ist, welcher Ellipse heisst, oder dass die Fische jenen engeren Umkreis der Wirbelthiere ausfüllen, welcher mit dem Worte „Fisch" bezeichnet wird; aber diese Abgränzung, welche ja durch die beliebten Euler'schen Kreise so deutlich vor Augen tritt, ist eben doch erst die Folge qualitativer Bestimmtheiten, welche man in der Logik als inhaltliche Merkmale zu bezeichnen pflegt, d. h. der engere Umkreis muss als qualitative Modification des weiteren Umkreises erfasst werden und erst hiedurch wird er wirklich zum engeren Umkreise gemacht. Die Bedingungen des Auftretens eines Merkmales und die Bedingungen einer abermaligen Modification eines Merkmales können nicht auf Zahlenwerthe zurückgeführt werden, sondern sind und bleiben Gegenstand unmittelbarer Erfahrung und Beobachtung. Wenn der Kreis als Kegelschnitt durch die leiseste Drehung der den Kegel schneidenden Ebene sofort beginnt, in eine Ellipse überzugehen, so liegt eine qualitative Modification der „Lage" zu Grunde, welche wohl als messbar dem Calcul unterworfen wird, aber darum nicht aufhört, eine Qualität des Quantitativen (s. oben) zu sein; die logische Allgemeinheit aber des Begriffes Kegelschnitt bleibt schweben über dem Uebergange des Kreises zur Ellipse. Und wenn wir fragen, durch welch qualitative Modification der Allgemein-Begriff Wirbelthier sich zu dem Allgemein-Begriffe Fisch verengere, so wird uns die Entwicklungstheorie nicht eine mathematische Antwort geben können. Sollte mit den Merk-

malen, sowie mit den Art- und Gattungsbegriffen wirklich gerechnet werden, so müssten sie wohl als Summanden oder als Factoren wirken; aber dieselben bewegen sich nicht nur in wechselseitiger Einordnung und manigfaltigster Kreuzung, sondern greifen auch weit über die Function einer Addition oder Multiplication hinaus, indem sie durch ihr Hinzutreten geradezu qualitative Modificationen der anderen vorhandenen Merkmale hervorrufen. Man analysire z. B. die Begriffe Apollo oder Strafrecht oder Nervenschmerz u. dgl. und sehe zu, welch disparate Fäden in jedem derselben derartig zusammentreffen, dass jeder einzelne Faden gleichsam die anderen ins Schlepptau nimmt, jedenfalls aber dieselben modificirend beeinflusst. Und gerade jene Beziehungen zwischen Artbegriff und Merkmal, welche nicht auf Quantitatives zurückgeführt werden können, müssen logisch gefasst werden, wobei insbesondere der Causal-Nexus, aber auch viele andere Momente, wie z. B. ein Concessiv- oder ein Final-Verhältniss eine scharfe Anspannung der qualitativen Betrachtung fordern. Während der Mathematik es ermöglicht ist, in ihrem speciellen Gebiete die sämmtlichen Unterarten eines Begriffes in erschöpfter Darlegung mit unbestrittener Gewissheit anzugeben (z. B. die Arten des Kegelschnittes oder die sogenannten regulären Körper), zeigt sich im Gebiete des nichtmathematischen Qualitativen eine so manigfaltige Verflechtung und Kreuzung der Merkmale, dass die Gliederung der Arten und Unterarten immerhin bestreitbar, aber auch eben wissenschaftlich anregend bleibt. Man denke z. B. an die verschiedenen Arten des Irrseins (Stumpfsinn, Melancholie, Verrücktheit, Wahnsinn, Tobsucht) oder in der Ethik an die wissenschaftliche Gruppirung und Darstellung der einzelnen Tugenden und ihrer Schattirungen, wo der logische Calcul mit seinen Gleichungen quantificirter Prädicate uns im Stiche lässt und sich auch keine Hilfe zeigt, wenn wir einen der Begriffe als Function, φ (a, b, c, d) ausdrücken wollen;

denn die Variabilität der a, b, c, d ist keine bloss quantitative.

Da ausser einer Logik der bloss formalen Widerspruchslosigkeit auch eine Logik der materiellen Wahrheit gefordert ist, so wird es sich betreffs der letzteren bei allen Wissenschaften, sei es, dass sie Natur oder dass sie Geschichte betreffen, zunächst um das Verständniss eines verschiedenartigsten Thatsächlichen und sodann um manigfaltigste beurtheilende „Versuche" handeln, bei welchen die einzelnen Determinationen, aus welchen sich ein bestimmtes substantielles Auftreten ergibt, zunächst isolirt, dann wieder in allen möglichen Verbindungen erfasst werden müssen, bis das Verfahren der sogenannten successiven Ausschliessung der einzelnen Umstände zu einer möglichst vollgiltigen Zusammenfassung führt. All solches methodische Verfahren aber ist auf unmittelbare Erfahrung und Beobachtung eines qualitativen Bestandes zurückgewiesen, welcher neben und ausserhalb der mathematischen Auffassung liegt.

Her Ohlenschlager legte die jüngste Lieferung seiner prähistorischen Karte Bayerns unter erläuternden Bemerkungen vor und machte Mittheilung über die Ausgrabungen zu Kempten.

Herr Hofmann gab eine vorläufige Mittheilung über die Chronik von Morea.

Historische Classe.

Sitzung vom 4. Dezember 1886.

Herr v. Löher hielt einen Vortrag:

„Ueber deutsche Rechtsbildung während des fränkischen Reiches."

1. Volksrechte und Geistlichkeit.

Im Zeitalter der Merowinger und Karolinger begegnet uns eine gesetzgeberische Thätigkeit, wie sie sonst nur auf hoher Bildungsstufe vorkommt: das gesammte bürgerliche Recht wird schriftlich gebucht und bereichert, und über das öffentliche Recht verbreitet sich neu schaffend eine sehr ausführliche Gesetzgebung. Das geschah bei Germanen, die nichts weniger als schreibselig waren und an bessernde Einrichtung des Staatswesens meistens noch so wenig dachten, dass sie für dasselbe kein eigenes Wort hatten, sondern ein fremdes annahmen. Und auch dieses Wort bezeichnete nur ganz allgemein den öffentlichen Zustand — status, Staat, — gerade so wie sie für das ihnen ungewohnte Zusammenbauen von Häusern kein anderes Wort wussten, als Stätte — Stadt. Auch der Natur des germanischen Rechtes widersagte das Aufschreiben; denn dieses Recht wurzelte in uralter Ueberlieferung, in Herkommen und Gewohnheit, und bildete sich sehr langsam fort nicht durch wissenschaftliche Arbeit, sondern in halb unbewusster Nothwendigkeit aus Volkesmitten heraus durch alle, die daran Theil hatten, nämlich durch die Urtheile, die von Mund zu

160 P882

Prantl

Uber die mathematisirende logik

G E STECHERT & Co. NEW YORK